# Ответы и решения задач «белого» уровня сложности MathCat

**1.** **(5 баллов)** Аня спросила у Димы, сколько тому лет. Дима ответил: «Если мой возраст увеличить в три раза, а потом уменьшить на 16, то мне было бы 17 лет». Сколько лет Диме?

**Ответ:** 11
**Решение:** Составляем уравнение 3x-16=17. Решив его, получаем ответ 11.

**2.** **(5 баллов)** Посмотрев на календарь, Олег заметил: «Через 363 дня будет в 14 раз большее число, чем сегодняшнее». В каком месяце и в какой день Олег смотрел на календарь?

**Ответ:** 2 марта
**Решение:** Через 365 или 366 дней (в зависимости от високосности года) наступит та же самая дата. По условию, за 2 или 3 дня до этого (то есть "позавчера" или "позапозавчера") было в 14 раз большее число, то есть 14-е или 28-е. Но через 2-3 дня от 14-го наступает 16-е или 17-е, то есть этот вариант не годится. Через 2-3 дня от 28-го обычно наступает 30-е, 31-е или 1-е, что также не годится. Исключение - день через 2 дня от 28 февраля, которым и является 2 марта. (Замечание: между 2 марта и 28 февраля следующего года всегда проходит ровно 363 дня, потому что добавляемый день 29 февраля в этот промежуток не попадает.)

**3.** **(7 баллов)** Федя каждый день ест одинаковое количество витаминок. Витаминки продаются в большой, средней или маленькой упаковке. В большой упаковке витаминок в три раза больше, чем в маленькой, а в средней - вдвое больше, чем в маленькой. Большая упаковка у Феди полностью заканчивается ровно за 50 дней. На сколько дней Феде хватит средней упаковки?

**Ответ:** 33
**Решение:** Пусть в маленькой упаковке n витаминок, тогда в средней 2n, а в большой 3n. По условию, 3n витаминок Федя съедает за 50 дней, значит, в день Федя ест 3n/50. Тогда средняя упаковка из 2n витаминок соответствует в днях результату деления 2n на (3n/50), то есть полностью закончится через 100/3 дня. Это 33 ⅓ дня. Следовательно, такой упаковки хватит на 33 дня (но не хватит на 34). Замечание: ответ в любом случае должен быть целым числом дней.

**4.** **(8 баллов)** Катерине был 21 год, когда у нее родился сын. Сколько лет исполнилось Катерине в 2020 году, если в 1999 году в день рождения сына он был младше ее в четыре раза?

**Ответ:** 49 и/или 50
**Решение:** Разница в возрасте между Катериной и ее сыном в дату его рождения всегда такая же, как в момент рождения и составляет 21 год. В 1999 году эта разница была втрое больше возраста сына, значит, сыну исполнилось 7 лет, то есть он родился в 1992, а сама Катерина - на 21 год старше. Следовательно, в 2020 году в день рождения сына ей было 49 лет. Если она родилась в 1970 после даты рождения сына, то ей в 2020 исполнится 50, а если ее дата рождения раньше, чем у сына - то в 2020 ей исполнилось 49.

**5.** **(10 баллов)** Петя разрезал квадрат на 7 частей тремя прямыми линиями, не проходящими через вершины квадрата. У него оказалось три пятиугольника. Сколько углов у оставшихся четырёх фигур?

**Ответ:** 13
**Решение:** Три прямых пересекаются в трёх точках внутри квадрата (иначе частей было бы меньше семи), а также пересекают стороны квадрата в шести других точках. Каждая из внутренних точек является вершиной у четырёх фигур (в сумме - 12), каждая из пересечений со сторонами - у двух (в сумме 12), еще четыре угла фигур дадут углы квадрата. Итого всего будет 28 углов. Вычитая по пять углов в каждом из пятиугольников, получим 28-3*5=13.

**6.** **(10 баллов)** Две вершины квадрата лежат на оси абсцисс, а две остальные - на графике параболы **y=x2**. Чему равна площадь этого квадрата?

**Ответ:** 16

**Решение:** Если одна из вершин квадрата на оси абсцисс имеет абсциссу a, то абсцисса другой равна -a. У двух остальных вершин абсциссы такие же, а ординаты равны $a^2$. Приравнивая длины горизонтальной и вертикальной сторон, получаем уравнение $a^2=2a$, откуда a=2. то есть квадрат имеет сторону 4 и площадь 16.

7. **(12 баллов)** Коля и Миша разрезали два одинаковых прямоугольника. У Коли получились два прямоугольника периметром 8 см каждый, а у Миши – два прямоугольника периметром 13 см каждый. Какой периметр имели первоначальные прямоугольники?

**Ответ:** 14

**Решение:** Раз у ребят получились прямоугольники, значит, они резали прямой, параллельной стороне исходного. Так как прямоугольники оказались одинаковыми, то линия разреза проходила через середины противоположных сторон. Следовательно, если обозначить 2x и 2y стороны исходного прямоугольника, то у Коли получились прямоугольники со сторонами 2x и y, а у Миши - со сторонами x и 2y. Тогда получаем уравнения для периметров: $2(2x+y)=8$, $2(x+2y)=13$. В принципе, их можно просто решить и найти значения x и y, а затем периметр $4(x+y)$. Однако есть более элегантный и более быстрый способ найти ответ: сложив оба уравнения, получим $6x+6y=21$, откуда $x+y = 3.5$ и $4(x+y)=14$.

8. **(13 баллов)** В примере на деление **AB/CD=E** различными буквами обозначены различные цифры, причем они идут в порядке убывания. Найдите, чему равно делимое.

**Ответ:** 86

**Решение:** Весь пример расшифровывается как 86/43=2. Докажем, что этот вариант единственно возможный. Действительно, частное не может быть 3 или более 3, так как при этом делитель должен быть не менее 54, а произведение 3 на 54 уже трёхзначное. Также частное точно не равно 1, потому что делимое не равно делителю. Следовательно, частное равно 2. Но тогда делитель не меньше 43 и точно не больше 49, поскольку делимое меньше 100. Следовательно, C=4. Но так как по условию $E<D<C$, то $2<D<4$, откуда D=3. Умножая 2 на 43, получаем двузначное число AB=86.

9. **(15 баллов)** Пара натуральных чисел **(a,b)** удовлетворяет уравнению **ab + a + b = 2020**. Найдите все возможные значения суммы **a+b** (в ответе перечислите их через запятую).

**Ответ:** 88

**Решение:** Добавив 1 к обеим частям, получим слева произведение $(a+1)(b+1)$, а справа $2021=43*47$. Числа 43 и 47 простые (не имеют других делителей, кроме 1 и себя). Так как числа $a+1$ и $b+1$ не меньше 2, то одно из них равно 43, а другое 47, поэтому их сумма равна $(43-1)+(47-1)=90-2=88$.

10. **(15 баллов)** На шахматной доске стоит n коней. Известно, что какие бы 8 коней ни взять, среди них найдутся хотя бы два бьющих друг друга. Какое наибольшее значение может принимать n?

**Ответ:** 14

**Решение:** Сначала приведём пример с 14 конями. Он получается, если расставить коней на все поля первой горизонтали, кроме самого правого поля, а также на все поля третьей горизонтали, кроме самого левого. Здесь 7 пар коней: для каждого коня первой горизонтали есть парный конь третьей горизонтали, стоящий на клетку правее - эти два коня бьют друг друга. Какие бы 8 коней ни взять, среди них найдутся два коня из одной пары. Теперь убедимся, что расстановки большего числа коней не существует. Действительно, если коней хотя бы 15, то найдутся 8 из них, стоящие на клетках одного цвета (в стандартной шахматной раскраске). Ни один из этой восьмёрки коней не бьет никакого другого из неё.